

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М. В. КЕЛДЫША  
РОССИСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»**

---

**Утверждена**

Ученым советом ФИЦ ИПМ

им. М.В. Келдыша РАН,

протокол № \_\_\_\_ от «\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

Заместитель директора

\_\_\_\_\_ А.Л. Афендииков

(подпись, расшифровка подписи)

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

# **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА**

**УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

**Комбинаторный анализ и теория графов**

**Направление подготовки**

01.06.01 — «Математика и механика»

**Профили (направленности программы)**

01.01.09 — «Дискретная математика и математическая кибернетика»

**Квалификация выпускника**

Исследователь. Преподаватель-исследователь

**Форма обучения**

очная

Москва, 2018

**Направление подготовки:** 01.06.01 — «Математика и механика»

**Профиль (направленность программы):** 01.01.09 — «Дискретная математика и математическая кибернетика»

**Дисциплина:** Комбинаторный анализ и теория графов

**Форма обучения:** очная

Рабочая программа составлена с учетом ФГОС ВО по направлению подготовки 01.06.01 — «Математика и механика», утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 30 июля 2014 года № 866, зарегистрировано в Минюсте Российской Федерации 25 августа 2014 года № 33837, и Программы-минимум кандидатского экзамена по специальной дисциплине «Дискретная математика и математическая кибернетика», утвержденной приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 8 октября 2007 года № 274 (зарегистрировано Минюстом Российской Федерации 19 октября 2007 года № 10363).

**РЕЦЕНЗЕНТ:** Храпченко В.М., к.ф.-м.н., снс.

#### **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА РЕКОМЕНДОВАНА**

Ученым советом ФИЦ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, протокол № \_\_\_ от «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

**ИСПОЛНИТЕЛЬ** (разработчик программ):

Яшунский А.Д., ИПМ им. М.В.Келдыша, заведующий сектором, к.ф.-м.н.

Заведующий аспирантурой \_\_\_\_\_ / Меньшов И.С. /

## Оглавление

АННОТАЦИЯ .....	4
1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ.....	4
2. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ .....	4
3. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ .....	5
3.1. Структура дисциплины.....	5
3.2. Содержание разделов дисциплины .....	5
3.3. Семинарские занятия .....	5
4. ТЕКУЩАЯ И ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ .....	6
5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ.....	7
6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ .....	7

## 1 АННОТАЦИЯ

Дисциплина «Комбинаторный анализ и теория графов» реализуется в рамках Блока 1 Основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре Федерального исследовательского центра Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН) по направлению подготовки 01.06.01 — «Математика и механика».

Рабочая программа разработана с учетом требований ФГОС ВО по направлению подготовки 01.06.01 — «Математика и механика», утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 30 июля 2014 года № 866, зарегистрировано в Минюсте Российской Федерации 25 августа 2014 года № 33837, и Программы-минимум кандидатского экзамена по специальной дисциплине «Дискретная математика и математическая кибернетика», утвержденной приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 8 октября 2007 года № 274 (зарегистрировано Минюстом Российской Федерации 19 октября 2007 года № 10363).

Основным источником материалов для формирования содержания программы являются: материалы конференций, симпозиумов, семинаров, Интернет-ресурсы, научные издания и монографические исследования и публикации.

Общая трудоемкость дисциплины по учебному плану составляет 2 зач.ед. (72 часа), из них лекций – 4 часа, семинарских занятий – 8 часов, практических занятий – 0 часов и самостоятельной работы – 60 часов. Дисциплина реализуется на 1-м курсе, в 2-м семестре, продолжительность обучения – 1 семестр.

Текущая аттестация проводится не менее 2 раз в соответствии с заданиями и формами контроля, предусмотренные настоящей программой.

Промежуточная оценка знания осуществляется в период зачетно-экзаменационной сессии в форме зачета.

### 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

#### Цели и задачи дисциплины «Комбинаторный анализ и теория графов»

**Цель:** ознакомление с классическими задачами комбинаторики и методами их решения; ознакомление с понятиями и основными теоремами теории графов.

**Задачи:** изучить основные комбинаторные числа и их асимптотические оценки; приобрести опыт самостоятельного решения задач комбинаторного анализа с применением различных методов; изучить основные понятия и теоремы теории графов; приобрести опыт доказательства различных свойств графов.

### 2. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Процесс изучения дисциплины «Комбинаторный анализ и теория графов» направлен на формирование компетенций или отдельных их элементов в соответствии с ФГОС ВО направлению подготовки 01.06.01 — «Математика и механика», утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 30 июля 2014 года № 866, зарегистрировано в Минюсте Российской Федерации 25 августа 2014 года № 33837.

**а) универсальные (УК):** не предусмотрено

**б) общепрофессиональных (ОПК):** Способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий (ОПК-1)

**в) профессиональных (ПК):** Способность к исследованию методами минимизации дискретных функций и алгоритмами на графах (ПК-1).

Способность использовать основные понятия теории функциональных систем и проблематики полноты (ПК-2).

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

**Иметь представление:** о задачах и методах комбинаторики, понятиях и теоремах теории графов.

**Знать:** основные комбинаторные числа и их асимптотики; формулировки комбинаторных неравенств, определений и теорем теории графов.

**Уметь:** решать задачи комбинаторного анализа; доказывать теоремы теории графов.

**Владеть:** комбинаторными и комбинаторно-вероятностными методами оценки числа комбинаторных объектов; аппаратом теории графов.

**Приобрести опыт:** самостоятельного решения комбинаторных задач и доказательства свойств графов.

### 3. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

#### 3.1. Структура дисциплины

Распределение трудоемкости дисциплины по видам учебных работ

Вид учебной работы	Трудоемкость	
	общая	
	зач.ед.	час.
<b>ОБЩАЯ ТРУДОЕМКОСТЬ</b> по Учебному плану	<b>2</b>	<b>72</b>
<i>Аудиторные занятия</i>		
Лекции (Л)		4
Практические занятия (ПЗ)		-
Семинары (С)		8
<b>Самостоятельная работа (СР) без учёта промежуточного контроля:</b>		
Самоподготовка (проработка и повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий, подготовка к семинарским и практическим занятиям) и самостоятельное изучение тем дисциплины		60
<b>Вид контроля: зачет</b>		

#### 3.2. Содержание разделов дисциплины

Общее содержание дисциплины

№ раздела	Наименование темы (раздела)	Содержание темы (раздела)	Форма текущей аттестации
1.	Основные комбинаторные числа и их асимптотики	Основные комбинаторные числа. Выборки. Перестановки, сочетания, перестановки с повторениями, сочетания с повторениями. Биномиальные коэффициенты, полиномиальные коэффициенты, полиномиальная теорема. Числа Стирлинга. Обращение Стирлинга. Числа	О, ДЗ

		Белла. Оценки и асимптотики для комбинаторных чисел. Порядок роста функции факториала. Формула Стирлинга. Энтропийные оценки для биномиальных коэффициентов и сумм биномиальных коэффициентов. Неравенство Чернова.	
2.	Методы и приемы комбинаторного анализа	Формулы обращения. Локально конечные частично упорядоченные множества. Функция Мебиуса. Формула обращения для частично упорядоченных множеств. Методы вычислений функций Мебиуса. Метод включений и исключений. Неравенства Бонферрони. Арифметическая функция Мебиуса и её свойства.	О, ДЗ
3.	Теория производящих функций	Производящие функции и формальные степенные ряды. Биномиальные ряды и их свойства. Примеры применения метода производящих функций для решения комбинаторных задач. Теорема о решении линейных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами. Числа Фибоначчи и их свойства. Элементарные симметрические функции и степенные суммы; тождества Ньютона. Задача о расстановке скобок; числа Каталана.	О, ДЗ
4.	Основы теории графов	Графы и сети. Оценки числа графов и сетей различных типов. Перечисление графов на нумерованных вершинах. Верхняя оценка для числа неизоморфных графов с $q$ ребрами. Плоские и планарные графы. Формула Эйлера для плоских графов. Теорема Понтрягина--Куратовского (без доказательства достаточности). Ориентированные графы. Эйлеровы циклы. Теорема Эйлера. Теорема Эйлера для ориентированных графов; последовательности де Брейна. Деревья и их свойства. Оценка числа неизоморфных корневых деревьев с $q$ ребрами. Теорема Кэли о числе деревьев на нумерованных вершинах.	О, ДЗ
5.	Свойства графов	Двудольные графы. Теорема Кёнига--Эгервари о пересекающих множествах в двудольном графе. Теорема Холла о паросочетаниях в двудольном графе.	О, ДЗ

		Теорема Дилуорса о представлении частично упорядоченных множеств. Разбиение Анселя множества всех двоичных наборов длины $n$ на непересекающиеся цепи. Теорема Шпернера. Теорема Менгера (вершинная и рёберная формы). Раскраски графов. Хроматическое число. Проблема четырех красок. Теорема о пяти красках. Теоремы Брукса и Визинга.	
б.	Экстремальные теоремы для графов	Экстремальная теория графов. Теорема Турана. Элементы теории Рамсея. Теорема Рамсея (конечный случай). Числа Рамсея. Теорема Эрдёша (о нижней оценке для чисел $N(p,r,2)$ ).	О, ДЗ

**Примечание:** О – опрос, Д – дискуссия (диспут, круглый стол, мозговой штурм, ролевая игра), ДЗ – домашнее задание (эссе и пр.). Формы контроля не являются жесткими и могут быть заменены преподавателем на другую форму контроля в зависимости от контингента обучающихся. Кроме того, на занятиях семинарских может проводиться работа с нормативными документами, изданиями средств информации и прочее, что также оценивается преподавателем.

### 3.3. Лекционные занятия

№ занятия	№ Раздела (темы)	Краткое содержание Раздела (темы)	Кол-во часов
1.	1	Основные комбинаторные числа и их асимптотики.	2
2.	4	Основные понятия и теоремы теории графов.	2
<b>ВСЕГО</b>			<b>4</b>

### 3.4. Семинарские занятия

№ занятия	№ Раздела (темы)	Краткое содержание Раздела (темы)	Кол-во часов
3.	2	Задачи подсчета комбинаторных объектов: основные приемы.	2
4.	3	Метод производящих функций для подсчета комбинаторных объектов.	2
5.	5	Доказательства специальных свойств графов: методы и основные результаты.	2
6.	6	Доказательства экстремальных свойств графов.	2
<b>ВСЕГО</b>			<b>8</b>

## 4. ТЕКУЩАЯ И ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

**Текущая аттестация аспирантов.** Текущая аттестация аспирантов проводится в соответствии с локальным актом ФИЦ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН - Положением о текущей, промежуточной и итоговой аттестации аспирантов ФИЦ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН по программам высшего образования – программам подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре и является обязательной.

Текущая аттестация по дисциплине проводится в форме опроса, а также оценки вопроса-ответа в рамках участия обучающихся в дискуссиях и различных контрольных

мероприятиях по оцениванию фактических результатов обучения, осуществляемых преподавателем, ведущим дисциплину. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины см. ниже.

Объектами оценивания выступают:

- учебная дисциплина – активность на занятиях, своевременность выполнения различных видов заданий, посещаемость занятий;
- степень усвоения теоретических знаний и уровень овладения практическими умениями и навыками по всем видам учебной работы, проводимых в рамках семинаров, практических занятий и самостоятельной работы.

Оценивание обучающегося на занятиях осуществляется с использованием нормативных оценок по 4-х бальной системе (5-отлично, 4-хорошо, 3-удовлетворительно, 2-не удовлетворительно).

**Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.**

Форма контроля знаний	Вид аттестации	Примечание
проверочные работы в течение всего курса	текущая	Ниже приведены перечни рекомендуемых задач и контрольных вопросов
зачет	итоговая	Приведен список вопросов к зачету.

Примерный перечень рекомендуемых **контрольных вопросов** для оценки текущего уровня успеваемости студента:

1. Формула Стирлинга.
2. Неравенство Чернова.
3. Неравенства Бонферрони.
4. Теорема о решении линейных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами.
5. Числа Фибоначчи и их свойства.
6. Числа Каталана.
7. Верхняя оценка для числа неизоморфных графов с  $q$  ребрами.
8. Формула Эйлера для плоских графов.
9. Теорема Понтрягина--Куратовского (без доказательства достаточности).
10. Теорема Эйлера для ориентированных графов.
11. Теорема Кэли о числе деревьев на нумерованных вершинах.
12. Теорема Кёнига--Эгервари.
13. Теорема Холла.
14. Теорема Дилуорса.
15. Теорема Шпернера.
16. Теорема о пяти красках.
17. Теоремы Брукса и Визинга.
18. Теорема Турана.



#### 19. Теорема Рамсея (конечный случай).

Рекомендуемые контрольные задачи для оценки текущего уровня успеваемости студента содержатся в соответствующих разделах задачника: Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике.

Список вопросов для итогового контроля:

1. Основные комбинаторные числа.
2. Выборки. Перестановки, сочетания, перестановки с повторениями, сочетания с повторениями.
3. Биномиальные коэффициенты, полиномиальные коэффициенты, полиномиальная теорема.
4. Числа Стирлинга. Обращение Стирлинга. Числа Белла.
5. Оценки и асимптотики для комбинаторных чисел.
6. Порядок роста функции факториала.
7. Формула Стирлинга.
8. Энтропийные оценки для биномиальных коэффициентов и сумм биномиальных коэффициентов.
9. Неравенство Чернова.
10. Формулы обращения.
11. Локально конечные частично упорядоченные множества. Функция Мебиуса.
12. Формула обращения для частично упорядоченных множеств.
13. Методы вычислений функций Мебиуса. Метод включений и исключений.
14. Неравенства Бонферрони.
15. Арифметическая функция Мебиуса и её свойства.
16. сетей различных типов. Перечисление графов на нумерованных вершинах.
17. Верхняя оценка для числа неизоморфных графов с  $q$  ребрами.
18. Плоские и планарные графы. Формула Эйлера для плоских графов.
19. Теорема Понтрягина—Куратовского.
20. Двудольные графы.
21. Теорема Кёнига–Эгервари о пересекающихся множествах в двудольном графе.
22. Теорема Холла о паросочетаниях в двудольном графе,

**Промежуточная аттестация аспирантов.** Промежуточная аттестация аспирантов по дисциплине проводится в соответствии с локальным актом ФИЦ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН – Положением о текущей, промежуточной и итоговой аттестации аспирантов ФИЦ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН по программам высшего образования – программам подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре и является обязательной.

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется в форме зачета в период зачетно-экзаменационной сессии в соответствии с Графиком учебного процесса по приказу (распоряжению заместителю директора по научной работе). Обучающийся допускается к зачету в случае выполнения аспирантом всех учебных заданий и мероприятий, предусмотренных настоящей программой. В случае наличия учебной задолженности (пропущенных занятий и (или) невыполненных заданий) аспирант отрабатывает пропущенные занятия и выполняет задания.

Оценивание обучающегося на промежуточной аттестации осуществляется с использованием нормативных оценок на зачете – зачет, незачет.

### Оценивание аспиранта на промежуточной аттестации в форме зачета

Оценка	Требования к знаниям и критерии выставления оценок
Незачет	основное содержание учебного материала не раскрыто; допущены грубые ошибки в определении понятий и при использовании терминологии; не даны ответы на дополнительные вопросы.
Зачет	раскрыто содержание материала, даны корректные определения понятий; допускаются незначительные нарушения последовательности изложения; допускаются небольшие неточности при использовании терминов или в логических выводах; при неточностях задаются дополнительные вопросы.

## 5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### *Основная литература*

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 2001.
2. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Том I. Под общ. ред. С. В. Яблонского и О. Б. Лупанова. М.: Наука, 1974.
3. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004.

### *Дополнительная литература и Интернет-ресурсы*

1. Кнут Д., Грехем Р., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. М.: Мир, 1998. 703 с.
2. Оре О. Теория графов. М.: Наука, 1968. 352 с.

## 6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Для обеспечения интерактивных методов обучения для чтения лекций требуется аудитория с мультимедиа (возможен вариант с интерактивной доской).

Для проведения дискуссий и круглых столов, возможно, использование аудиторий со специальным расположением столов и стульев.

**ИСПОЛНИТЕЛИ** (разработчики программы):

Яшунский А.Д., ИПМ им. М.В.Келдыша, заведующий сектором, к.ф.-м.н.